第４講　複素数と領域

4

［A］　複素数 $z=x+yi$ （x，y は実数）に対して，複素数 w を，$w=\dfrac{z}{z+1}$ で定める．以下の３つの各場合について，w のとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$y>0$

(2)　$x^2+y^2>1$ かつ $y>0$

(3)　$|x|<\dfrac{1}{2}$ かつ $y>0$

［B］　α，β，γ は互いに相異なる複素数とする．

(1)　複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ．

(2)　複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき，z は α，β，γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ．ただし α，β，γ は同一直線上にはないものとする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　複素数と領域

4　0でない複素数zに対し，$w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$とおく．このとき，wの実部が正になるようなzの範囲を複素数平面上に図示せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　複素数と領域

4

［A］　複素数 $z=x+yi$ (x，y は実数) に対して，複素数 w を，$w=\dfrac{z}{z+1}$ で定める．以下の３つの各場合について，w のとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

(1)　$y>0$

(2)　$x^2+y^2>1$ かつ $y>0$

(3)　$|x|<\dfrac{1}{2}$ かつ $y>0$

［B］　α，β，γ は互いに相異なる複素数とする．

(1)　複素数平面上で $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正となる z の存在する範囲を図示せよ．

(2)　複素数 z が $(z-\alpha)(z-\beta)+(z-\beta)(z-\gamma)+(z-\gamma)(z-\alpha)=0$ を満たしているとき，z は α，β，γ を頂点とする三角形の内部に存在することを示せ．ただし α，β，γ は同一直線上にはないものとする．

【答】　略

【解説】

［A］

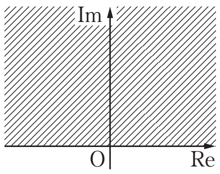
$$w=\frac{z}{z+1} \iff w=1-\frac{1}{z+1}$$
$$\iff w-1=-\frac{1}{z+1}$$
$$\iff z+1=-\frac{1}{w-1}$$
$$\iff z=-1-\frac{1}{w-1}$$
$$\therefore\ z=\frac{-w}{w-1}$$

(1)

$$y>0$$
$$\iff \frac{z-\overline{z}}{2i}>0$$
$$\iff \frac{1}{2i}(z-\overline{z})>0$$
$$\iff \frac{1}{2i}\left(\frac{-w}{w-1}-\frac{-\overline{w}}{\overline{w}-1}\right)>0$$
$$\iff \frac{1}{2i|w-1|^2}\{-w(\overline{w}-1)+\overline{w}(w-1)\}>0$$
$$\iff \frac{1}{|w-1|^2}\cdot\frac{w-\overline{w}}{2i}>0$$
$$\therefore\ \frac{w-\overline{w}}{2i}>0$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

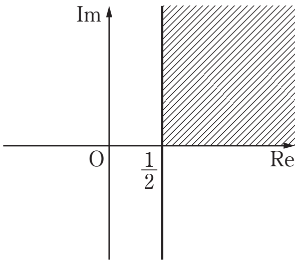


境界を含まない斜線部分

(2)

$$x^2+y^2>1 \iff |z|>1$$
$$\iff \left|\frac{-w}{w-1}\right|>1$$
$$\iff |w|>|w-1|$$

これと(1)の結果をあわせて



境界を含まない斜線部分

(3)

$$|x|<\frac{1}{2} \iff \left|\frac{z+\overline{z}}{2}\right|<\frac{1}{2}$$
$$\iff -1<z+\overline{z}<1$$

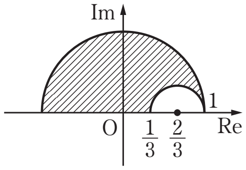
ここで

$$z+\overline{z}=\frac{-w}{w-1}+\frac{-\overline{w}}{\overline{w}-1}$$
$$=\frac{-w\overline{w}+w-w\overline{w}+\overline{w}}{|w-1|^2}$$

より

$$|x|<\frac{1}{2}$$
$$\iff -|w-1|^2<-2w\overline{w}+w+\overline{w}<|w-1|^2$$
$$\iff w\overline{w}<1 \text{ かつ } w\overline{w}-\frac{2}{3}w-\frac{2}{3}\overline{w}+\frac{1}{3}>0$$
$$\iff |w|<1 \text{ かつ } \left|w-\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}$$

これと(1)の結果をあわせて



境界を含まない斜線部分

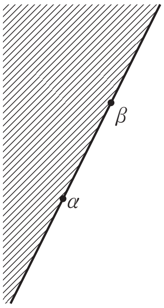
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ の虚数部分が正であるので

$$\frac{\beta-z}{\alpha-z}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ \ (r>0,\ 0<\theta<\pi)$$

とおける．ここで A(α)，B(β)，P(z) とすると P を中心に A から B までの角が 0 より大きく π 未満であるので，z の存在する範囲は下図．



境界を含まない斜線部分

(2) $z=\alpha$ とすると

$$(\text{与式})\iff(z-\beta)(z-\gamma)=0$$

よって $z=\beta$ または $z=\gamma$ となり，α，β，γ が互いに異なることに矛盾．よって $z-\alpha\neq0$．
このとき

$$\begin{aligned}(\text{与式})&\iff\frac{z-\beta}{z-\alpha}+\frac{z-\beta}{z-\alpha}\cdot\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+\frac{z-\gamma}{z-\alpha}=0\\&\iff\left(\frac{z-\beta}{z-\alpha}+1\right)\left(\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+1\right)=1\quad\cdots\cdots①\end{aligned}$$

ここで $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}+1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha}=(r\cos\theta-1)+(r\sin\theta)i$$

となる．また

$$\begin{aligned}①\iff\frac{z-\gamma}{z-\alpha}+1&=\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=\frac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)\\\therefore\quad\frac{z-\gamma}{z-\alpha}&=\frac{1}{r}\cos\theta-1+\left(-\frac{1}{r}\sin\theta\right)i\end{aligned}$$

より $\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\alpha}$ の虚数部分は共に 0 か異符号となる．

虚数部分が共に 0 のとき α，β，γ が同一直線上にあるか，z が α，β と α，γ の交点つまり $z=\alpha$ となるがどちらも不適．

よって，$\dfrac{z-\beta}{z-\alpha}$ と $\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ の虚数部分は同符号となる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\dfrac{z-\alpha}{z-\gamma}$ と $\dfrac{z-\gamma}{z-\beta}$ の虚数部分についても同様に同符号といえるので

$$\frac{z-\beta}{z-\alpha},\ \frac{z-\gamma}{z-\beta},\ \frac{z-\alpha}{z-\gamma}\ \text{はすべて虚数部分が同符号となる.}$$

(1)よりこれは三角形の内部を表すので題意は示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　複素数と領域

4　0 でない複素数 z に対し，$w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$ とおく．このとき，w の実部が正になるような z の範囲を複素数平面上に図示せよ．

【答】　略

【解説】

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
w&=z^2-\frac{1}{z^2}\\
&=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)-\frac{1}{r^2}\{\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)\}\\
&=\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta+i\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\theta
\end{aligned}
$$

ここで w の実部が正より

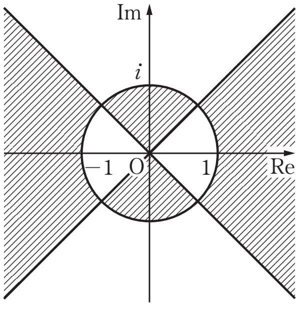
$$
\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\theta>0
$$

$$
\iff (r-1)\cos 2\theta>0
$$

$$
\iff \begin{cases} r-1>0 \text{ かつ } \cos 2\theta>0 \\ \text{または} \\ r-1<0 \text{ かつ } \cos 2\theta<0 \end{cases}
$$

$$
\iff \begin{cases} r>1 \text{ かつ } 0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi<\theta<2\pi \\ \text{または} \\ r<1 \text{ かつ } \dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi<\theta<\dfrac{7}{4}\pi \end{cases}
$$

よって z の範囲は境界を含まない下図の斜線部分.



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。